SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2001-2002

Giovanna Citti - Alessandro Sarti

IL FUNZIONALE DI MUMFORD E SHAH COME LIMITE DI UN MODELLO DI OSCILLATORI NEURALI

12 febbraio 2002

Tecnoprint - Bologna 2003

Riassunto In questo seminario presentiamo un risultato ottenuto in collaborazione con M.Manfredini e A.Sarti. Stabiliamo una relazione formale fra un modello di oscillatori neurali nella corteccia visiva, ed il funzionale di Munford e Shah. Infatti le connessioni fra le colonne corticali inducono una metrica riemanniana, e la fase degli oscillatori evolve in questo spazio, attraverso un'equazione alle differenze, che possiamo pensare definita su una griglia di dimensione ϵ. Il funzionale di Eulero Lagrange associato all'equazione Γ-converge, quando la dimensione della griglia tende a 0, al funzionale di Mumford e Shah nella metrica riemanniana. Analogamente, le soluzioni dell' equazione discreta di fase convergono ad una soluzione BV che puo' essere considerata il flusso associato al funzionale di Mumford e Shah. In questo modo viene quindi fornita una motivazione biologica a questo famoso funzionale.

Abstract In this seminary I present a joint work with M.Manfredini e A. Sarti. Aim of this study is to provide a formal link between a oscillatory neural model, whose phase is represented by a difference equation, and the Mumford and Shah functional. A Riemannian metric is induced by the pattern of neural connections, and in this setting the difference equation is studied. Its Euler Lagrange operator Γ-converges as the dimension of the grid tends to 0, to the Mumford-Shah functional in the same Riemannian space. Correspondingly the solutions of the phase equation converge to a BV function, which is interpreted as the flow associated to the Mumford and Shah. In this way we provide a biological motivation to this celebrated functional.

1. Introduzione

Questo seminario è la presentazione di alcuni risultati ottenuti in collaborazione con Sarti e Manfredini, e contenuti in [34], dove vengono presentati vari modelli di visione, e posto il problema della relazione fra questi, e [13], dove viene data una prima risposta analitica ad alcune delle domande ivi contenute. Abbiamo studiato in questi lavori la relazione fra diversi modelli di "binding" o "perceptual grouping", che studiano processi di riconoscemento delle immagini da parte del nostro sistema visivo. Infatti lungo la traiettoria che va dall'oggetto fisico all'osservatore, le radiazioni luminose sono completamente indipendenti le une dalle altre, la retina è a sua volta un mosaico di cellule indipendenti. Eppure il nostro sistema visivo è in grado di elaborare gli impulsi che riceve, e ricostruire l'oggetto che vede. Inoltre, in presenza di oggetti sovrapposti è anche in grado di ricostruire bordi nascosti (il fenomeno e' noto come completamento amodale). Per spiegare questi fenomeni sono stati introdotti sia modelli microscopici per la determinazione delle funzionalità biologiche [39], sia modelli macroscopici dedotti da esperimenti di fenomenologia percettiva (si veda [22]).

1.1. Modelli neurali. Shuster and Wagner [38, 39] hanno sopposto che i neuroni nella corteccia siano raggruppati in strutture complesse, dette colonne corticali, ciascuna delle quali può essere interpretata come oscillatore. La fase degli oscillatori evolve attraverso un'equazione alle diffenrenze, e le zone semanticamente omogenee nell'immagine vengono codificate attraverso oscillatori che oscillano in fase (si veda [21]). Poiché la funzione u rappresenta la fase, ha valori in $\mathbb{R}/2\pi$ e la funzione ϕ è periodica del medesimo periodo. Inoltre il rapporto incrementale è definito a meno di 2π

$$D_\xi^\epsilon u(x) := \frac{(u(x+\epsilon\xi) - u(x)) mod(2\pi)}{\epsilon|\xi|}. \tag{1}$$

Shuster and Wagner hanno altresi proposto di convolvere con una Gaussiana che esprime la probabilità che un oscillatore si connesso con un altro. Ottengono quindi l'equazione seguente:

$$\partial_t u(t) = \int \exp(-|\xi|) \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} D_\xi^{-\epsilon} \Big(\tilde{g}_{ij} \phi_{\epsilon|\xi|} \Big(D_\xi^\epsilon u(x) \Big) \Big) d\xi, \tag{2}$$

per una opportuna funzione $\phi_{\epsilon|\xi|}(z)$. La matrice g_{ij}, è semidefinita positiva e descrive le connessioni fra le colonne corticali [19]. In questo primo lavoro abbiamo supposto che la metrica fosse riemanniana secondo il modello di [35], altri autori [30, 31, 32] hanno invece proposto modelli di metriche subriemanniane.

1.2. Modelli di tipo curvatura o variazionali. E' stato parallelamente sviluppato un vasto programma di ricerca per introdurre e studiare la segmentazione di immagini. Assegnata un'immagine I, cioè una funzione definita su un aperto Ω si tratta di riconoscere sottinsiemi Ω_i che definiscono i diversi oggetti. I modelli piú diffusi in questo senso sono il modello di Mumford and Shah [28], e i modelli di moto per curvatura, in uno spazio euclideo o Riemanniano.

1.2.1 La segmentazione di immagini attraverso evoluzione per curvatura è stata diffusamente studiata in spazi euclidei e riemanniani. Una curva in R^2 puo' essere identificata con un insieme di livello di una funzione u di due variabili, e a valori

reali. L'equazione che esprime il moto di ciascuno dei suoi livelli per curvatura in una varietà riemanniana si scrive

$$\partial_t u = |Du|_g \partial_i \Big(\frac{g^{ij}\partial_j u}{|Du|_g} \Big) \tag{3}$$

dove g^{ij} è l'inversa della metrica. Questo approccio, è stato inrodotto da Osher and Sethian [29], e sviluppato da Malladi, Sethian and Vemuri [27], Caselles, Catte, Coll, and Dibos in [9] per segmentare immagini in spazi euclideo e e R. Kimmel, R. Malladi and N. Sochen in [23, 40, 41] per segmentazione in spazi riemanniani. In questi lavori il riconoscimento delle immagini viene effettuato evolvendo una singola curva nel piano bidimensionale dell'immagine. Recentemente è stato presentato da [35] un nuovo modello di evoluzione in cui tutti i livelli di u vengono fatti evolvere allo stesso tempo. La soluzione tende verso una funzione u costante a tratti con salti geodesici e ciascuna regione in cui u è costante individua un singolo oggetto, mentre i salti costituiscono i bordi degli oggetti. L'evoluzione tridimensinale di tutta la superficie risulta piú efficiente rispetto ai modelli precedenti, poiché, in presenza di immagini complesse, permette di riconoscere quali oggetti si trovano sopra, e quali sotto (fenomeno della saliency), e anche di ricostruire bordi nascosti di oggetti sottostanti (completamento modale e amodale).

1.2.2 Il funzionale forse piú noto per il riconoscimento di immagini è il funzionale di Mumford e Shah, introdotto per la segmentazione di immagini in [28]

$$MS(u) = \int |\nabla u|^2 + dH^{n-1}(S_u) + \int |u - u_0|^2. \tag{4}$$

Di questi tre termini il primo richiede che la soluzione sia regolare fuori dall'insieme dei salti, il secondo impone la minimizzazione della lunghezza dei salti stessi, mentre il terzo termine impone che la soluzione sia un' approssimazione in norma L^2 dell' immagine assegnata u_0. L'operatore è definito rispetto alla metrica euclidea, ma come vedremo è possibile dare una formulazione analoga dell'operatore, anche rispetto ad una metrica riemanniana. L'esistenza di un minimo del funzionale è stata provata da De Giorgi, Carriero, Leaci in [18], sono studiate le sue proprietà di inferiore semicontinuità Anbrosio in [1] nel caso isotropo, Fonseca Fusco [20] e Trombetti [42] nel caso riemanniano.

1.3. **Relazione fra questi diversi modelli.** Questi due modelli sono legati da alcune relazioni naturali. Nello studio dei minimi locali del funzionale di Mumford and Shah, e le proprietà geometriche del suo insieme di salti, possiamo supporre che il terzo termine non sia presente. In questo caso si prova (si veda [3]) che i minimi locali sono funzioni costanti a tratti. Il loro insieme di discontinuità è stato completamente classificato soltanto in dimensione 2, ma anche in dimensione maggiore si sa che, se è di classe C^1, allora ha curvatura nulla. Le principali proprietà dell'insieme del salti sono state provate da Ambrosio, Fusco, Pallara [3], Bonnet [8], David, in [16, 15, 17]. Si tratta quindi della medesima soluzione che si determina con l'evoluzione per curvatura, sia nel caso euclideo, sia riemanniano.

Nel lavoro con Sarti e Manfredini [34], che presento qui abbiamo provato una prima relazione fra i modelli neuronali e quelli variazionali. La prova è organizzata come segue: per ogni $\epsilon > 0$ indichiamo $\hat{F}_\epsilon$ il funzionale di Eulero Lagrange relativo all'equazione (2). Usando la tecnica dello slicing proviamo che questa famiglia di funzionali $\Gamma-$ converge all'operatore di Mumford e Shah, con una opportuna metrica riemanniana. Inoltre fissato $\epsilon > 0$, ed un dato iniziale L^2 e costante a tratti,

il problema di Cauchy relativo all'equazione (2) ha una soluzione $u_\epsilon \in C([0,\infty[, L^2)$, e con valori costanti a tratti. Fissato $t > 0$, la famiglia $u_\epsilon(t)$ converge ad una funzione u. Rimane ancora aperto il problema di qual'è l'equazione verificata dai salti di u durante l'evoluzione, e se u può essere interpretata come flusso relativo al Munford e Shah. Cosa che invece è stata dimostrata in dimensione 1, e in assenza di metrica.

La tecnica che utilizziamo è stata introdotta da Gobbino [24, 25, 26] per provare una congettura forumalata da De Giorgi. Egli ha provato la convergenza di una famiglia di funzionali alle differenze finite Γ convergeva al funzionale di Mumford and Shah, con metrica costante, e sotto ipotesi diverse dalle nostre. Chambolle [11] e Chambolle, DalMaso [12] hanno dato un'implementazione numerica di questa tecnica. La stessa tecnica è stata diffusamente estesa da Braides et alii in [4], [5, 6], [7] per studiare la relazione fra espressione discreta dell'energia dei mezzi elastici, e la sua controparte continua.

2. Dal modello discreto al modello continuo

2.1. Equazione alle differenze. Studiamo dapprima l'esistenza di soluzioni per l'equazione (2).

La matrice $\tilde{g}_{ij}$ che vi compare è continua in R^n, e definisce una metrica rimanniana. La funzione $\phi_{\epsilon|\xi|}$, è una funzione continua, ottenuta da un opportuno rescaling della funzione seno:

$$\phi_\epsilon : \Big] -\frac{\pi}{\epsilon}, \frac{\pi}{\epsilon}\Big] \to \mathbb{R} \quad \phi_\epsilon(z) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} sin(\epsilon z) & \text{if } |z| \leq 2\epsilon^{-1/2}, \\ sin(\epsilon z) & \text{if } |z| \geq 2\epsilon^{-1/2} + \epsilon^4 \end{cases} \tag{5}$$

Inoltre $\phi_\epsilon(z)$ è estesa su tutto $\mathbb{R}$ per periodicità.

Poiché l'equazione è discreta, le sue soluzioni si cercano nello spazio

$$PC_\epsilon^2 = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \ u \textit{ constante sul cubo } z + [0,\epsilon]^n \ \forall z \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Indicata φ_ϵ una primitiva di $\phi_\epsilon(z)$,

$$\varphi_\epsilon :] -\frac{\pi}{\epsilon}, \frac{\pi}{\epsilon}] \to \mathbb{R} \quad \varphi_\epsilon(z) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon^2} sin^2(\frac{\epsilon z}{2}) & \text{if } |z| \leq 2\epsilon^{-1/2}, \\ \frac{1}{\epsilon}\Big(sin^2(\frac{\epsilon z}{2}) + 1 + o(\epsilon)\Big) & \text{if } |z| \geq 2\epsilon^{-1/2} + \epsilon^4 \end{cases},$$

il funzionale

$$\hat{F}_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}_{ij}(x) \varphi_{\epsilon|\xi|}(D_\xi^\epsilon u(x)) dx \Big) d\xi, \tag{6}$$

è definito in PC_ϵ^2. Inoltre

Proposition 2.1. *Sia $\epsilon > 0$ fissato.*

- *Per ogni $u \in PC_\epsilon^2$ il gradiente di $\hat{F}_\epsilon$ in u è dato da:*

$$(\nabla \hat{F}_\epsilon(u))(x) = -\int \exp(-|\xi|) \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} D_\xi^{-\epsilon} \Big(g_{ij}(x) \phi_{\epsilon|\xi|}(D_\xi^\epsilon u(x)) \Big) d\xi$$

- *$\nabla \hat{F}_\epsilon$ è una funzione lipschtziana in PC_ϵ^2.*

Il problema di Cauchy associato all'equazione (2) risulta quindi:

$$\begin{cases} u_\epsilon'(t) = -\nabla \hat{F}_\epsilon(u_\epsilon(t)) & t \geq 0, \\ u_\epsilon(0) = u_{0\epsilon} \end{cases} \tag{7}$$

dove $u_{0\epsilon} \in PC^2$. La teoria standard delle ODE fornisce una soluzione $u_\epsilon \in C^1([0,+\infty[, PC_\epsilon^2)$, che dipende con continuità dal dato iniziale.

2.2. **Funzioni a variazione limitata e Γ convergenza.** Studiamo ora la convergenza della famiglia $\hat{F}_\epsilon$ di funzionali che abbiamo definito, e della famiglia di soluzioni u_ϵ dell'equazione differenziale. Richiamiamo preliminarmente alcune definizioni e proprietà di queste funzioni. (Si veda anche [14])

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Indichiamo $BV(\Omega)$ l' insieme delle funzioni a variazione limitata. E' noto che la derivata distribuzionale Du di una funzione in questo spazio è una misura di Radon, che ammetta la rappresentazione seguente:

$$Du = D^a u + D^j u + D^c u,$$

dove $D^a u$ è assolutamente continuo rispetto alla misura di Lebesgue e

$$D^j u = (u^+(y) - u^-(y))\nu_u H^{n-1} \lfloor S(u)$$

è la parte di salto, mentre $D^c u$ è la parte cantoriana della misura Du.

Definition 2.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un aperto, e sia $u \in BV(\Omega)$. diciamo che u è una funzione speciale a variazione limitata, e indichiamo $SBV(\Omega)$ se $D^c u = 0$. Diciamo che $u \in SBV_{loc}(\Omega)$ se $u \in SBV_{loc}(A)$ per ogni $A \subset\subset \Omega$ (si veda [2]).*

Ricordo per completezza anche la definizione di Γ-convergenza di funzionali

Definition 2.2. *Se (X,d) è uno spazio metrico, una famiglia $F_j : X \to \mathbb{R}$ di funzionali Γ converge a F per $j \to \infty$ se le due condizioni seguenti sono soddisfatte:*

- *Per ogni u in X e per ogni successione (u_j) convergente a u in X,*
$$F(u) \leq \liminf_j F_j(u_j)$$
- *per ogni $u \in X$ esiste una successione (u_j) convergente a u in X tale che*
$$F(u) \geq \limsup_j F_j(u_j).$$

Per la particolare espressione dei funzionali $\hat{F}_\epsilon$, avremo bisogno di una opportuna modifica del classico teorema di compattezza negli spazi BV. Infatti lavoreremo con un a famiglia (u_ϵ) di funzioni tali che la quantità

$$N(u_\epsilon) = \int_\Omega |u_\epsilon| dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|} \int_\Omega |D_\xi^\epsilon u_\epsilon(x)| dx d\xi \tag{8}$$

sia limitata

Theorem 2.1. *Sia (u_ϵ) una famiglia di funzioni in L^1_{loc} tali che $N(u_\epsilon)$ è limitata. Allora esiste una successione ϵ_j convergente a 0 e una funzione u in BV_{loc} tale che u_{ϵ_j} converge a u in L^1_{loc}.*

La prova si può fare verificando che la famiglia

$$u_\epsilon^\epsilon(x) = \int \eta(\xi) u_\epsilon(x + \epsilon\xi) d\xi$$

è limitata in $BV(\Omega)$, e quindi relativamente compatta. D'altra parte

$$\int |u_\epsilon - u_\epsilon^\epsilon(x)| \leq C\epsilon,$$

e quindi anche la famiglia assegnata ammette una sottosuccessione convergente.

2.3. convergenza di funzionali di dimensione 1. La prova della convergenza della famiglia di funzionali F_ϵ che presentiamo è basata sul metodo delle sezioni. Si prova preliminarmente un risultato di conergenza in dimensione 1. Poi, sfruttando il fatto che i funzionali sono in forma integrale, si estende il risultato in dimensione alta, applicando un'opportuna variante del teorema di riduzione, che vale per le funzioni in esame. La tecnica che usiamo combina quelle di [24] e [4].

In dimensione 1 l'operatore diviene

$$F_{\epsilon,\xi,g}(u,I) = \int_I g(x)\varphi_{\epsilon|\xi|}(D^\epsilon_\xi u(x))dx \tag{9}$$

dove $I \subset \mathbb{R}$, g è una funzione continua e strettamente positiva. In dimensione 1, fissata ξ positiva si ha

$$\int_I g(x)\varphi_{\epsilon|\xi|}(D^\epsilon_\xi u(x))dx = \int_I g(x)\varphi_{\epsilon|\xi|}(D^{\epsilon\xi}_1 u(x))dx,$$

e analogamente si può ragionare per $\xi < 0$. Quindi supporremo sempre che $\xi = 1$ in questo contesto.

Ricordiamo che

Theorem 2.2. *Se* $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *è una funzione convessa non decrescente* $\lim_{z\to+\infty} \frac{\varphi(z)}{z} = +\infty$ *e* $\psi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, subadditiva e tale che* $\inf \phi > 0$, *allora il funzionale* $MS_{\varphi,\psi,g}(u,I)$, *definito*

$$MS_{\varphi,\psi,g}(u,I) = \begin{cases} \int_I g(x)\varphi(|\nabla u(x)|)dx + \int_{I\cap S(u)} g(x)\psi(|u^+ - u^-|)dx & u \in SBV(I), \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{10}$$

è inferiormente semicontinuo in L^1_{loc}.

Theorem 2.3. *Indichiamo*

$$\varphi(z) = \frac{z^2}{4}, \quad \psi(z) = \frac{\sin^2(z)}{4} + 1,$$

Allora per ogni successione $u_j \to u$ *in* L^1_{loc}, *si ha*

$$\lim \inf_{j\to+\infty} F_{\epsilon_j,1,g}(u_j,\mathbb{R}) \geq MS_{\varphi,\psi,g}(u,\mathbb{R}).$$

$$\lim \sup_{j\to+\infty} F_{\epsilon_j,1,g}(u,\mathbb{R}) \leq MS_{\varphi,\psi,g}(u,\mathbb{R}).$$

$$\Gamma \lim_{j\to+\infty} F_{\epsilon_j,\xi,g}(u_j,\mathbb{R}) = MS_{\varphi,\psi,g}(u,\mathbb{R}).$$

diamo un accenno di prova della prima affermazione. Possiamo supporre, ragionando come [4] p. 82, ed eventualmente modificando la successione u_{ϵ_j} che per ogni $\eta > 0$ sia verificata la relazione

$$F_{\epsilon_j}(u,I) + \eta \geq \epsilon_j \sum_{k\in J_j} g(k\epsilon_j)\varphi_{\epsilon_j}\left(D^{\epsilon_j}u(k\epsilon_j)\right),$$

dove abbiamo indicato

$$J_j = \{k \in \mathbb{Z} : (\epsilon_j k, \epsilon_j(k+1)) \subset I\}.$$

Poiché J_j è finito, possiamo indicare

$$J_j = \{k_1^j, \cdots k_{N_j}^j\}$$

e denotiamo

$$J_j^1 = \{k \in J_j : \frac{|(u_j((k+1)\epsilon_j) - u_j(k\epsilon_j)) \, mod \, 2\pi|}{\epsilon_j} \leq 2\epsilon_j^{-1/2}\}, \quad J_j^2 = J_j \setminus J_j^1.$$

Poi definiremo v_j come segue:

$$\begin{cases} \left(\frac{t}{\epsilon_j} - k\right)u_j(\epsilon_j(k+1)) + \left((k+1) - \frac{t}{\epsilon_j}\right)u_j(k\epsilon_j) & in \ \epsilon_j(k, k+1), \ k \in J_j^1 \\ u_j(k\epsilon_j) & in \ \epsilon_j(k, k+1), \ k \in J_j^2 \\ u_j(k_0^1\epsilon_j) & if \ t \leq k_0^j\epsilon_j \\ u_j((k_{N_j}^k + 1)\epsilon_j) & if \ t \geq (k_{N_j}^j + 1)\epsilon_j. \end{cases}$$

Con queste notazioni la stima di F_{ϵ_j} diviene

$$F_{\epsilon_j}(u, I) + \eta \geq \epsilon_j \sum_{k \in J_j} g(k\epsilon_j)\varphi_{\epsilon_j}\left(D^{\epsilon_j}u(k\epsilon_j)\right) \geq$$

$$\geq \sum_{k \in J_j^1} \epsilon_j g(k\epsilon_j)\varphi_{\epsilon_j}\left(D^{\epsilon_j}u(k\epsilon_j)\right) + \sum_{k \in J_j^2} \epsilon_j g(k\epsilon_j)\varphi_{\epsilon_j}\left(\frac{u_j((k+1)\epsilon_j) - u_j(k\epsilon_j)}{\epsilon_j}\right) \geq$$

$$\geq \inf_{s \leq \epsilon_j^{-1/2}} \frac{\varphi_{\epsilon_j}(s)}{\varphi(s)} \sum_{k \in J_j^1} \epsilon_j g(k\epsilon_j)\varphi\left(D^{\epsilon_j}u(k\epsilon_j)\right) + \sum_{k \in J_j^2} g(k\epsilon_j)\psi\left(u_j((k+1)\epsilon_j) - u_j(k\epsilon_j)\right) =$$

$$= \inf_{s \leq \epsilon_j^{-1/2}} \frac{\varphi_{\epsilon_j}(s)}{\varphi(s)} \int_I g(t)\varphi(|v_j'|)dt + \sum_{S(v_j) \cap I} g\,\psi(|v_j^+ - v_j^-|).$$

Per il teorema precedente MS è inferiormente semicontinuo, e quindi si ottiene

$$\lim_{j \to +\infty} \inf F_{\epsilon_j}(u_j, I) \geq MS(u, I) - \eta.$$

L' arbitrarietà di $\eta > 0$ fornisce la prima affermazione nel caso di I intervallo limitato. L'affermazione rimane vera anche su tutto $\mathbb{R}$ come si prova approssimando questo insieme dall'interno.

2.4. Il metodo delle sezioni: convergenza di $\hat{F}_\epsilon$ in dimensione n. Il caso di dimensione n segue da quello di dimensione uno, con il metodo di slicing, diffusamente applicato a problemi di convergenza per funzioni BV. Si veda per esempio Gobbino [24], and Braides [4]. Riportiamo qualche dettaglio della prova, per poter definire l'operatore di MS rispetto ad una metrica riemanniana.

Poiché abbiamo necessità di calcolare il rapporto incrementale nella direzione ξ, rappresentiamo lo spazio come prodotto cartesiano di una retta parallela a ξ, e dell'ortogonale. Ora infatti $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e sia $< \xi >^\perp = \{z \in \mathbb{R}^n :< \xi, z >= 0\}$ lo spazio ortogonale a ξ. Per ogni $y \in < \xi >^\perp$ consideriamo la funzione $u_{\xi y}$ definita

$$u_{\xi y} = u\left(y + t\frac{\xi}{|\xi|}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Con queste notazioni l'operatore $\hat{F}_\epsilon$ definito in (6) diviene

$$\hat{F}_\epsilon(u, \mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}} \int_{<\xi>^\perp} F_{\epsilon,\xi,g_{ij}}(u_{\xi y}, \mathbb{R})dyd\xi, \tag{11}$$

dove l'operatore $F_{\epsilon,\xi,g_{ij}}(u_{\xi y},\mathbb{R})$ è stato definito nella sezione precedente. In questo modo il funzionale $F_{\epsilon,\xi,g_{ij}}$ si rappresenta in termini delle sue sezioni unidimensionali. Analogamente anche il funzionale di MS si rappresenta in termini delle sue sezioni.

Introduciamo ora la metrica

$$g_{ij}p_ip_j = \int \frac{e^{-|\xi|}\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\tilde{g}_{ij}(< p,\xi >)^2 d\xi \tag{12}$$

e definiamo l'operatore di Mumford e Shah in dimensione n:

$$MS_{\varphi,\psi,g}(u,\mathbb{R}^n) = \int g_{ij}\partial_i u \partial_j u + \int_{S(u)} \psi(|u^+ - u^-|)N_g(x,\nu_u)dH^{n-1}, \tag{13}$$

dove :

$$N_g(x,\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\tilde{g}_{ij}(x)| < \nu,\xi > |d\xi. \tag{14}$$

Theorem 2.4. *Per ogni funzinoe $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ si ha*

$$MS_{\varphi,\psi,g}(u,\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\Big(\int_{<\xi>^\perp} MS_{\phi,\psi,g_{ij}}(u_{\xi y},\mathbb{R})dy\Big)d\xi,$$

dove $MS_{\varphi,\psi,g}$ è definita in (13).

Le proprietà del funzionale $\hat{F}_\epsilon$ si deducono ora dai risultati unidimensionali e dalla formula di rappresentazione contenuta nel Teorema 2.4.

Theorem 2.5. *La famiglia di funzionali $(\hat{F}_\epsilon)$ definita in (11) $\Gamma-$ converge a $MS_{\varphi,\phi,g}$ in L^1_{loc}.*

2.5. **Convergenza delle soluzioni dell'equazione di evoluzione.** Proviamo in questa sezione che, fissata una funzione u_0, questa puèssere approssimata da una successione u_ϵ di funzioni tali che $u_\epsilon \in PC^2_\epsilon$ per ogni ϵ. Per ogni ϵ il problema di Cauchy introdotto nel paragrafo 2.1 individua una funzione $(u_\epsilon(t))$. Qui proviamo che $(u_\epsilon(t))$ ha una sottosuccessione convergente ad una funzione $u(t)$ tale che $u(0) = u_0$. I limiti possibili di successioni di questo tipo sono i candidati ad essere il flusso gradiente del funzinale di Mumford e Shah con dato iniziale u_0.

Definiamo lo spazio

$$X = \{u \in SBV_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}/[0,2\pi]) : MS(u) < +\infty\}.$$

Poiché il funzionale $\hat{F}_\epsilon$ è definito per funzioni costanti a tratti, introduciamo una discretizzazione della funzione u_0.

Proposition 2.2. *(si veda [25]). Esiste una famiglia $(u_{0\epsilon}) \in PC^2_\epsilon(\mathbb{R}^n, R/[0,2\pi])$ tale che*

$$u_{0\epsilon} \to u_0 \quad in \quad L^2_{loc}(\mathbb{R}^n);$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\hat{F}_\epsilon(u_{0\epsilon}) = MS(u_0)$$

e

$$\sup_{\epsilon>0}\{\hat{F}_\epsilon(u_{0\epsilon})\} < +\infty.$$

Studiamo ora il comportamento della famiglia (u_ϵ).

Lemma 2.1. *La famiglia (u_ϵ) determinata nella sezione 2.1 soddisfa*

$$\sup_{\epsilon\in[0,1]}\left(\int_\Omega |u_\epsilon|dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|}\int_\Omega |D_\xi^\epsilon u_\epsilon(x)|dxd\xi\right) < +\infty \tag{15}$$

ed esiste una successione (ϵ_k) convergente a 0 tale che (u_{ϵ_k}) è relativamente compatta in $C([0,+\infty[;L^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$ e ha pertanto un limite $u\in C([0,+\infty[;L^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$ tale che $u(t)\in BV(\Omega)$ per ogni t.

Notiamo preliminarmente che il funzionale $\hat{F}_\epsilon$ è decrescente lungo il moto u_ϵ. Infatti

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{F}_\epsilon(u_\epsilon(t)) &= \langle\nabla\hat{F}_\epsilon(u_\epsilon(t)),u'_\epsilon(t)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \\ &= -||u'_\epsilon(t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = -||\nabla\hat{F}_\epsilon(u_\epsilon(t))||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned} \tag{16}$$

Vista l' espressione della funzione ϕ_ϵ, è naturale definire $D_\xi^{\epsilon,+}u_\epsilon(x) = D_\xi^\epsilon u_\epsilon(x)$ se $|D_\xi^\epsilon u_\epsilon(x)| > (\epsilon|\xi|)^{-\frac{1}{2}}$ e $D_\xi^{\epsilon,+}u_\epsilon(x)=0$. Inoltre chiamiamo

$$I^+_{\epsilon\xi} = \{x\in\mathbb{R}^n | D_\xi^{\epsilon,+}u_\epsilon(x)\neq 0\}. \tag{17}$$

Per ogni $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^n$, poiché u_ϵ assume valori in $[-\pi,\pi]$, si ha

$$\begin{aligned}I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|}\int_{I^+_{\epsilon\xi}\cap\Omega}|D_\xi^\epsilon u_\epsilon(x)|dxd\xi &\le 2c\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|}\int_{I^+_{\epsilon\xi}\cap\Omega}\frac{1}{\epsilon|\xi|}dxd\xi \le \\ &\le 2c\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|}\int_{I^+_{\epsilon\xi}\cap\Omega}\varphi_{\epsilon|\xi|}(D_\xi^\epsilon u_\epsilon)dxd\xi \le c\hat{F}_\epsilon(u_\epsilon).\end{aligned}$$

Inoltre poiché g_{ij} è uniformemente ellittica,

$$\hat{F}_\epsilon(u_\epsilon)\ge c\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus I^+_{\epsilon\xi}} e^{-|\xi|}\varphi_{\epsilon|\xi|}(D_\xi^\epsilon u_\epsilon(x))dxd\xi \ge c\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus I^+_{\epsilon\xi}} e^{-|\xi|}\varphi(D_\xi^\epsilon u_\epsilon(x))\,dxd\xi$$

per definizione di φ. Ne viene che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|}\int_\Omega |D_\xi^\epsilon u_\epsilon(x)|dxd\xi &= I_1 + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|}\int_{\Omega\setminus I^+_{\epsilon\xi}}|D_\xi^\epsilon u(x)|dxd\xi \le \\ &\le c\hat{F}_\epsilon(u_\epsilon) + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|}\left(\int_{\Omega\setminus I^+_{\epsilon\xi}}\varphi(D_\xi^\epsilon u_\epsilon(x))dx + c|\Omega|\right)d\xi \le \\ &\le c\hat{F}_\epsilon(u_\epsilon) + c|\Omega|,\end{aligned}$$

per una costante opportuna c.

Pertanto (15) è dimostrata. Da teorema 2.1, segue che per ogni $t\ge 0$, la famiglia $(u_\epsilon(t))$ è relativamente compatta in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Inoltre,

$$\begin{aligned}||u_\epsilon(t_1)-u_\epsilon(t_2)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le \int_{t_1}^{t_2}||u'_\epsilon e(t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \le \left(\int_{t_1}^{t_2}||u'_\epsilon(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt\right)^{\frac{1}{2}}|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \left(\hat{F}_\epsilon(u_{0\epsilon}(t))\right)^{\frac{1}{2}}|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}} \le c|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

per ogni $\epsilon>0$, e la conclusione segue dal teorema di Ascoli-Arzelá.

Le principali proprietà della funzione limite sono le seguenti:

Theorem 2.6. *Sia u_ϵ soluzione del problema (7), e u il suo limite, allora:* $u \in C([0,+\infty[; L^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$ $u(0) = u_0$; $MS(u(t)) \leq MS(u_0)$; *la funzione* $u = u(x,t)$ *è soluzione distribuzionale* $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ *dell'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(g_{ij}\nabla u)$$

dove D è la derivata distribuzionale fatta rispetto ad x, ∇u *è il gradiente approssimato di u.*

References

[1] L. Ambrosio, A compactness theorem for a New class of Functions of bounded variation. Bull. Un. Mat, It, 3-B (1989), 857-851.

[2] L. Ambrosio, Existence theorems for a new class of variational problems. Arch Rat Mech Anal 111, (1990) 291-322.

[3] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, Functions of bounded variation and free discontinuity problems. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Clarendon Press. xviii, (2000).

[4] A. Braides. Approximation of Free-Discontinuity Problems Lecture Notes in Mathematics No. 1694, Springer Verlag, Berlin, 1998.

[5] A. Braides and M.S. Gelli. From Discrete to Continuum: a Variational Approach. Lecture Notes. SISSA, Trieste, 2000.

[6] A. Braides and M.S. Gelli. Continuum limits of discrete systems without convexity hypotheses. Preprint SISSA, 1999, to appear on Math. Mech. Solids

[7] A. Braides, G. Dal Maso and A. Garroni. Variational formulation of softening phenomena in fracture mechanics: the one-dimensional case. Arch. Rational Mech. Anal. 146 (1999), 23-58.

[8] Bonnet A., On the regularity of edges in image segmentation, Ann. Inst. Henri Poincar, Anal. Non Linaire 13 (1996) 485-528.

[9] Caselles V., Catte' F., Coll T., Dibos F., A Geometric model for Active Contours, Numerische Mathematik 66 (1993) 1-31.

[10] V.Caselles, R.Kimmel, G.Sapiro, *Geodesic active contours*, IJCV, Vol.22,N.1,pag.61-79,1997.

[11] A. Chambolle, Finite difference discretisation of the Mumford shah Functional, M2AN Math. Model. Numer. Anal. 33 (1999), no. 2, 261-288.

[12] A. Chambolle, G. Dal Maso, Discrete approximation of the Mumford Shah Functional in dimention two, RAIRO Model Math Anal Numer., 33, 4, (1999), 651-672.

[13] G. Citti, M. Manfredini, A. Sarti, Neuronal Oscillations in the Visual Cortex: Γ−convergence to the Riemannian Mumford-Shah Functional, to appear on Siam J. Math. Anal.

[14] G. Dal Maso, An introduction to Γ-convergence, Birkhäuser, Boston, 1993.

[15] David G., C^1-arcs for minimizers of the Mumford-Shah functional, SIAM J. Appl. Math. 56 (1996) 783-888.

[16] David G., Semmes S., Uniform rectifiability and singular sets, Ann. Inst. Henri Poincar, Anal. Non Linaire 13 (1996) 383-443.

[17] David G., Semmes S., On the singular sets of minimizers of the Mumford-Shah functional, J. Math. Pures Appl. 75 (1996) 299-342.

[18] De Giorgi E., Carriero M., Leaci A., Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set, Arch. Ration. Mech. Anal. 108 (1989) 195-218.

[19] D.J. Field, A. Hayes, R.F. Hess, Contour integration by the human visual system: Evidence for a local association field, Vis. Res., Vol. , N.2, (1993), 173-193.

[20] I. Fonseca, N. Fusco, Regularity results for Anisotropic Image segmentation models, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 24 (1997), no. 3, 463-499.

[21] A. Engel, P. Konig, C. Gray, W. Singer, Temporal Coding by Coherent Oscillations as a Potential Solution to the Binding Problem: Physiological Evidence", Non linear dynamics and Neural Networks (H. Schuster ed.), Berlin,Springer, 1992.

[22] G. Kanizsa, Organization in Vision, Hardcover, 1979.

[23] R. Kimmel, R. Malladi and N. Sochen. "Images as embedded maps and minimal surfaces: Movies, Color, Texture, and Medical Images," to appear in *International Journal of Computer Vision*, 2000.

[24] M. Gobbino, Finite difference approximation of the Mumford-shah functional. Comm Pure Appl. Math, 51, (1998), 197-227.

[25] M.Gobbino, Gradient flow for the one dimentional Mumford Shah functional.Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Scienze (4), 27 (1998), 145-193.

[26] M. Gobbino, M.G. Mora, Finite difference Approximation of free discontinuous problems, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 131 (2001), no. 3, 567-595.

[27] R. Malladi, J. A. Sethian, B. Vemuri, *Topology independent shape modeling scheme*, SPIE Proceedings on Geometric Methods in Computer Vision II, San Diego, 1993, pp. 246-258.

[28] Mumford D., Shah J., Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems, Comm. Pure, Appl. Math. 17 (1989) 577-685.

[29] S. Osher, J.A. Sethian, *Front Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton Jacobi Formulation*, Journal of Computational Physics, Vol. 79, pp.12-49, 1988.

[30] J. Petitot, , Phenomenology of Perception, Qualitative Physics and Sheaf Mereology, Proceedings of the 16th International Wittgenstein Symposium, Vienna, Verlag Hlder-Pichler-Tempsky, pp 387-408,1994.

[31] J. Petitot, Y. Tondut, Vers une Neuro-geometrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux, Mathmatiques, Informatique et Sciences Humaines, EHESS, Paris, N.145, (1998), 5-101.

[32] J. Petitot, Morphological Eidetics for Phenomenology of Perception, in Naturalizing Phenomenology: Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science, (J. Petitot, F. J. Varela, J.-M. Roy, B. Pachoud, eds.), Stanford, Stanford University Press, (1998), 330-371

[33] A. Sarti, preprint.

[34] A. Sarti, G. Citti, M. Manfredini, ¿From neural oscillations to variational problems in the visual cortex, invited paper on J. of Physiology.

[35] A. Sarti, R. Malladi, J.A. Sethian, Subjective surfaces: A Method for Completion of Missing Boundaries, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol 12, N.97, pag. 6258-6263, 2000.
Published online before print May 23, 2000: http://www.pnas.org/cgi/content/full/110135797.

[36] Singer W., Gray C.M., Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis, Ann. rev. Neurosci. 18 (1995) 555-586.

[37] Singer W., Synchronization of cortical activity and its putative role in information processing and learning. Annu. Rev. Physiol. 55 (1993) 349-374.

[38] H.G. Schuster, P. Wagner, A model for neuronal oscillators in the visual cortex. I: Mean field theory and derivation of the phase equations.", Biol. Cybern., Vol.64, N.1, (1990), 77-82.

[39] H.G. Schuster, P. Wagner, A model for neuronal oscillators in the visual cortex. II: Phase description of the feature dependent synchronization. , Biol. Cybern., Vol.64, N.1, (1990),83-85.

[40] N.Sochen, R.Kimmel, R.Malladi, *A General Framework for Low Level Vision*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 7, N. 3, March 1998.

[41] N.Sochen, Y.Y. Zeevi, *Images as Manifolds Embedded in a Spatial-Feature Non-Euclidean Space*, PAMI.

[42] C. Trombetti, Existence of minimizers fot a class of anysotropic free discontinuity Problems, Annali di Mat. Pura Appl., 177, (1999), 277-292.

[43] H.R. Wilson, J.D. Cowan, Exitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons, Biophys. J., Vol.12, pp.1-24.